Preparación Olimpiada Matemática Española

Juegos de 2 jugadores

Ejercicio 1. A y B tienen una cantidad infinita de monedas idénticas. Por turnos, tienen que colocar una moneda en una mesa cuadrada (de dimensiones finitas) de forma que no solapen otras monedas y no sobrepasen los bordes de la mesa. El primer jugador que no pueda colocar una moneda, pierde. Asumiendo que al menos una moneda cabe en la mesa, prueba que el primer jugador tiene estrategia ganadora.

Ejercicio 2. A y B juegan el siguiente juego. Se empieza en 0, y por turnos A suma $1, 2$ o 3 y B suma $2, 3$ o 4. El primer jugador en llegar a 2022, gana. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

Ejercicio 3. A y B juegan el siguiente juego. A escribe en una pizarra los números de 1 a n en el orden que quiera, siendo n un entero mayor que 1. En cada turno, hay que escribir una sucesión de números que no estuviese ya escrita y que sea una permutación de la secuencia anterior, o igual a la anterior quitándole uno de los números. El primer jugador que no pueda escribir una secuencia, pierde. Determina quién tiene estrategia ganadora.

Ejercicio 4. En un tablero $n \times m$ se coloca una piedra en la esquina inferior derecha. A y B mueven la piedra por turnos. En cada movimiento la piedra se mueve cualquier número de casillas hacia la derecha o hacia arriba. El jugador que lleve la piedra a la esquina superior derecha gana. Determina para qué valores de n y m hay estrategia ganadora para A.

Ejercicio 5. Hay una torre de 100000 monedas. A y B juegan por turnos. En cada turno pueden quitar una moneda o la mitad de monedas, redondeando hacia arriba. El jugador que se lleve la última moneda, gana. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

Ejercicio 6. En una caja hay 300 cerillas. Dos jugadores sacan cerillas de la caja por turnos. En cada turno, deben quitar al menos una cerilla y como mucho la mitad de las cerillas. El primer jugador que no pueda sacar cerillas, pierde. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

Ejercicio 7. Hay $N > n^2$ piedras en una mesa. A y B juegan a un juego por turnos. En cada turno, cada jugador puede remover k piedras, donde k es un entero menor que n o múltiplo de n. El jugador que quite la última piedra, gana. Prueba que A tiene estrategia ganadora.

Ejercicio 8. Para enteros positivos t, a, b, el juego (t, a, b) es un juego para dos jugadores con las siguientes reglas. Se escribe t en una pizarra. El primer jugador reemplaza t por $t - a$ o $t - b$. El siguiente jugador reemplaza el número escrito en la pizarra n por $n - a$ o $n - b$, y así sucesivamente. El primer jugador en obtener un número negativo, pierde. Prueba que existen infinitos valores de t tales que el primer jugador tiene estrategia ganadora para cualesquiera a, b tales que $a + b = 2022$.

Ejercicio 9. Se barajan $2n$ cartas con números arbitrarios escritos en ellas. Se ponen las cartas en fila, con los números hacia arriba. Dos jugadores, por turnos, cogen una carta de un extremo de la fila. La puntuación de cada jugador es la suma de los valores de las cartas. Gana la mayor puntuación. Prueba que el primer jugador puede obtener al menos la misma puntuación que el segundo.

Ejercicio 10. A y B juegan a un juego. Hay 10^7 piedras. En cada turno, un jugador quita p^n piedras, siendo p primo y n natural. El jugador que quita la última piedra gana. ¿Quién tiene estrategia ganadora?